УДК 517.9

СОЛИТОНОПОДОБНЫЕ АСИМПТОТИКИ И АТТРАКТОРЫ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

©А. И. Комеч

Рассматриваются нелинейные волновые уравнения вида

$$\ddot{u}(x,t) = u''_{xx}(x,t) + f(x, u(x,t)), \ x \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Изучается вопрос об асимптотике при $t \to \infty$ решений $u(x,t)$, имеющих конечную энергию. Мы опишем результаты для следующих трех типов нелинейностей $f(x,u)$, локализованных по x:

1) для нелинейности, сосредоточенной в одной точке $x = 0$;

2) сосредоточенной в конечном числе точек $x_1, \ldots, x_N$;

3) для нелинейности, распределенной на конечном отрезке [-R,R].

Формально эти нелинейности можно записать в виде

$$f(x,u) = \delta(x)F(u); \tag{2}$$

$$f(x,u) = \sum_{k=1}^{N} \delta(x - x_k)F_k(u); \tag{3}$$

$$f(x,u) = \chi(x)F(u), \text{ где } \chi(x) \equiv 0 \text{ при } |x| \geq R. \tag{4}$$

Физически нелинейность (2) описывает взаимодействие линейной струны с одним нелинейным осциллятором в точке $x = 0$, (3) - с N осцилляторами, а (4) - с «континуумом» осцилляторов, непрерывно распределенных по отрезку $[-R, R]$.

Результат об асимптотике для нелинейности (2) частично опубликован в [1,2]. Опишем его более подробно.

Более точно, в [1,2] рассматривается струна с прикрепленной к ней в точке $x = 0$ частицей массы $m \geq 0$, находящейся во внешнем силовом поле $F(y)$:

$$\mu\ddot{u}(x,t) = Tu''_{xx}(x,t), \quad x \neq 0, \ -\infty < t < +\infty, \tag{5}$$

$$m\ddot{y}(t) = F(y(t)) + T[u'_x(0+,t) - u'_x(0-,t)]. \tag{6}$$

Здесь $y(t) \equiv u(0,t)$ - смещение частицы, T - натяжение струны, μ - ее плотность. Предполагается, что потенциал

$$V(y) \equiv -\int F(y)dy \to \infty \text{ при } |y| \to \infty \tag{7}$$

и может иметь много стационарных точек, в том числе и бесконечное множество.

Замечание. 1). Система (5)-(6) является формально гамильтоновой с гамильтонианом (энергией)

$$H(u,\dot{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{1}{2}|\dot{u}|^2 + \frac{1}{2}|u'_x|^2]dx + \frac{m\dot{y}^2}{2} + V(y), \tag{8}$$

где $y \equiv u\big|_{x=0}$, $\dot{y} \equiv \dot{u}\big|_{x=0}$.

2). Пусть $\overline{y}$ - стационарная точка потенциала: $V'(\overline{y}) = 0$. Тогда функция $\overline{u}(x) \equiv \overline{y}$ является стационарным решением системы (5)-(6) с конечной энергией(8). Обратное также верно.

Предположим, что силовое поле $F(y) \in C^1(\mathbb{R})$ - "невырожденное" :

$$F(y) \not\equiv 0 \text{ ни на каком непустом интервале } y_1 < y < y_2. \tag{9}$$

Теорема 1 . *[1,2]. При условиях (7), (9) любое решение системы (5)-(6) с конечной энергией сходится при $t \to \infty$ к одному из стационарных решений $\overline{u}_+(x) \equiv \overline{y}_+$, где $F(\overline{y}_+) = 0$: $\forall R > 0$*

$$u(x,t) \rightrightarrows \overline{u}_+(x), \ |x| < R, \ \textit{при}\ t \to +\infty. \tag{10}$$

Аналогичная асимптотика имеет место и при $t \to -\infty$: $\forall R > 0$

$$u(x,t) \rightrightarrows \overline{u}_-(x), \ |x| < R, \ \textit{при}\ t \to -\infty. \tag{11}$$

Замечание. Без условия (9) стабилизации (10) (и (11)) вообще говоря нет. Построены контрпримеры.

Кроме того, для системы (5)-(6) имеется «транзитивность» переходов:

Теорема 2 . *Для любых двух стационарных решений $\overline{u}_\pm(x)$ системы (5)-(6) с конечной энергией существует решение $u(x,t)$ с конечной энергией, которое их соединяет в смысле (10)-(11).*

Асимптотику решения (10) можно уточнить:

Теорема 3 . *При условиях (7), (9) любое решение системы (5)-(6) с конечной энергией имеет при $t \to +\infty$ асимптотику вида*

$$u(x,t) \sim \begin{cases} u_+(x,t) \equiv v_+(x-at), & x > 0 \\ u_-(x,t) \equiv v_-(x+at), & x < 0 \end{cases}; \ v'_\pm(x) \in L^2(\mathbb{R}). \tag{12}$$

Это означает, что при $t \to +\infty$

$$\int_0^{\pm\infty} \left[|\dot u(x,t) - \dot u_\pm(x,t)|^2 + |u'_x(x,t) - (u_\pm)'_x(x,t)|^2\right] dx \to 0. \tag{13}$$

Доказательство теорем 1-3 основано на методе Даламбера. А именно, решение уравнения (5) представляется в виде разложения Даламбера на две волны в каждой области $x > 0$ и $x < 0$ по отдельности. Затем уравнение (6) используется в качестве условия склейки и приводится к обыкновенному нелинейному уравнению с трением:

$$m\ddot y(t) = F(y(t)) - 2\sqrt{\mu T}\,\dot y(t) + f'_+(t), \quad t > 0. \tag{14}$$

Здесь $f_+(t)$- некоторая функция, просто определяемая по начальным значениям решения $u\big|_{t=0}$ и $\dot u\big|_{t=0}$. Грубо говоря, $f_+(t)$ есть сумма «падающих» или «приходящих» волн слева и справа от точки $x = 0$. Поскольку мы рассматриваем решения с конечной энергией, то $f'_+ \in L^2(\mathbb{R}_+)$, и поэтому из (14) можно вывести стабилизацию для $y(t)$:

$$y(t) \to \overline{y}_+ \text{ при } t \to +\infty, \text{ где } F(\overline{y}_+) = 0. \tag{15}$$

Отсюда легко выводится стабилизация (10), где $\overline{u}_+(x) \equiv \overline{y}_+$, $x \in \mathbb{R}$.

Замечания: 1. Представляется парадоксальным появление необратимого по времени уравнения (14) в обратимой задаче (5)-(6). Однако, оказывается, что связь (14) с (5)-(6) является ковариантной относительно замены $t \to -t$. А именно, уравнение (14) при $t < 0$ хотя и справедливо, но бесполезно, поскольку «приходящие» волны $f_+(t)$ при $t < 0$ не могут быть найдены из начальных значений решения при $t = 0$

каким-то простым способом. Поэтому для доказательства стабилизации при $t \to -\infty$ нужно заменить (14) аналогичным уравнением

$$m\ddot{y}(t) = F(y(t)) + 2\sqrt{2\mu T}\dot{y}(t) + f'_{-}(t), \ t < 0. \tag{16}$$

Теперь здесь $f_{-}(t)$-это «уходящие» волны, которые просто находятся из начальных значений. Поэтому при замене $t \to -t$ роль $f_{+}(t)$ переходит к $f_{-}(t)$, и уравнение (14) переходит в (16).

2. Трение в уравнении (14) обусловлено взаимодействием частицы со струной и является «трением излучения»: частица при колебаниях излучает волны, уходящие по струне на бесконечность.

3. Система (5)-(6) является тривиальной моделью атома. А именно, волновое уравнение (5) заменяет систему Максвелла, а уравнение Ньютона (6) - уравнение Шредингера или Дирака. Соответственно, полученная асимптотика (10) моделирует боровские переходы к стационарным орбитам.

4. Переходы (10) к стационарным состояниям являются сугубо нелинейным свойством. Они невозможны для линейных автономных систем, подобным уравнению Шредингера или Дирака с потенциалом, не зависящим от времени.

5. Транзитивность переходов, установленная в теореме 2, также является чисто нелинейным эффектом. Она означает, что система (5)-(6) дает пример системы с нетривиальным рассеянием связанных состояний, чего также не бывает в линейных автономных системах.

В настоящее время асимптотика решений с конечной энергией, аналогичная (10)-(14), доказана также для нелинейностей (3) и (4). При этом роль условия невырожденности (9) играет дополнительное требование вещественной аналитичности по u функций $F_k(u)$ в (3) и $F(u)$ в (4). Отметим, что доказательство стабилизации решения для случаев (3) и (4) существенно отличается от случая (2) и использует некоторые модификации методов [1].

Замечание. Полученная асимптотика вида (10)-(14) для нелинейностей (2)-(4) позволяет дать описание точечных аттракторов рассматриваемых систем. А именно,

1. Если рассматривать аттрактор $\mathfrak{A}_W$ в смысле слабой сходимости типа (10), то он состоит просто из дискретного множества стационарных решений этой системы.

2. Если же рассматривать точечный аттрактор $\mathfrak{A}_E$ в смысле сходимости по энергетической норме на всей оси $-\infty < x < +\infty$, как в (13), то он является бесконечномерным, но зато имеет простую структуру. А именно, грубо говоря, $\mathfrak{A}_E \approx \mathfrak{A}_W \times \mathcal{L}_+$, где $\mathcal{L}_+ \approx L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ представляет собой пространство уходящих волн, иначе говоря, бегущих солитонов из асимптотики (12).

1. *А.В.Бабин, М.И.Вишик*, Аттракторы эволюционных уравнений // М. : Наука, 1989.

2. *А.И.Комеч*, О стабилизации взаимодействия струны с осциллятором // Успехи мат. наук. – 1991. – **46**, – *N 6*. – С. 166–167.

3. *А.И.Комеч*, О стабилизации взаимодействия струны с нелинейным осциллятором // Вестник Московского университета. – 1991. – *N 6*. – С. 35–41.